566. 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}=x^m y$ ノ解ニ就テ

早田　文一

有理型函數ノ Defekt problem ニ関連シテ出テクル微分方程式

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=P(x)y \qquad P(x):\text{多項式}$$

ノ解ニツイテハソノ asymptotische Entwicklung ニヨリ性質ガ詳シクワカッテヰルノデアリマスカラ、次ニ述ベル様ナコトハ蛇足ニ過ギナイ次第デス。函数論ノ演習問題トシテ御覧下サイ。

(1)ニ於テ $P(x)$ ノ次數ヲ m トスレバ $y(x)$ ハ階數 $\frac{m+2}{2}$ ナル整函数ニナルコトハ上述ノ asymptotische Entwicklung ニヨリワカッテヰマスガ、コレヲ古典的ノ Koeffizienten abschätzung ニヨッテ証明セント努メマシタ。特ニ $P(x)=x^m$ ナルトキハ次ノヤウニ簡單ニ出來マスガ、コレガ一般ノ多項式ニナリマスト未定係數ノ組合セガ複雑ニナッテウマク行キマセン。

$$y(x)=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_nx^n+\cdots\cdots$$

ト置キ(1)ニコレヲ入レタ後同巾ノ係數ヲ比較スルト

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}=c_{n-m} \qquad n\geqq m$$

$$c_2=c_3=\cdots\cdots=c_{m+1}=0$$

故ニ $$c_{n+2}=\frac{c_{n+2-(m+2)}}{(n+2)(n+1)}=\frac{c_{n+2-2(m+2)}}{(n+2)(n+1)(n+2-(m+2))(n+2-(m+2)-1)}\cdots\cdots$$

$$= \frac{C_{n+2-K(m+2)}}{(n+2)(n+1)(n+2-(m+2))(n+2-(m+2)-1)\cdots(n+2-(K-1)(m+2))(n+2-(K-1)(m+2)-1)}$$

但シ　$K(m+2) < n+2 \leqq (K+1)(m+2)$

トスル。

$$(K-\nu)(m+2) < n+2-\nu(m+2) \leqq (K+1-\nu)(m+2)$$

$$(K-\nu)(m+2) \leqq n+1-\nu(m+2) < (K+1-\nu)(m+2)$$

従ッテ

$$|C_{n+2}| < \frac{|C_\alpha|}{(K(m+2))^2((K-1)(m+2))^2 \cdots\cdots (m+2)^2}$$

$$= \frac{|C_\alpha|}{(m+2)^{2K}(K!)^2}$$

但シ　$\alpha(n) = n+2-K(m+2)$

$$|C_{n+2}| > \frac{|C_\alpha|}{((K+1)(m+2))^2(K(m+2))^2 \cdots\cdots (2(m+2))^2}$$

$$= \frac{|C_\alpha|}{(m+2)^{2K}((K+1)!)^2}$$

Stirling ノ公式　$K! \sim K^K e^{-K}\sqrt{2\pi K}$ ニヨリ充分大ナルK

ニ就イテハ

$$\frac{|C_\alpha|}{(m+2)^{2K}K^{2K}e^{-2K}2\pi K} > |C_{n+2}|$$

$$> \frac{|C_\alpha|}{(m+2)^{2K}(K+1)^{2(K+1)}e^{-2(K+1)}2\pi(K+1)}$$

$$2K\log(m+2) + 2K\log K - 2K + \log(2\pi K) - \log|C_\alpha|$$

$$< \log\frac{1}{|C_{n+2}|} < 2K\log(m+2) + 2(K+1)\log(K+1)$$

$$-2(K+1)+\log(2\pi(K+1))-\log|C_\alpha|$$

一方　$(K+1)(m+2)\log\{(K+1)(m+2)\}>(n+2)\log(n+2)$

$$>K(m+2)\log\{K(m+2)\}$$

二ツノ不等式ヲ辺々ワッテ　$K\to\infty$ ナラシムレバ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\log(n+2)}{\log\frac{1}{|C_{n+2}|}}=\frac{m+2}{2}$$

但シ上ノ結果ハ　$C_{\alpha(n)}\neq 0$ ナル n ニ就イテノミ成立スル。

$g(x)$ ノ Ordnung ρ ハ公式：

$$\rho=\limsup_{n\to\infty}\frac{(n+2)\log(n+2)}{\log\frac{1}{|C_{n+2}|}}$$

ニヨッテ

$$\rho=\frac{m+2}{2}$$

C_n ハ　$n=\nu(m+2)$ 又ハ　$n=\nu(m+2)+1$　ナルトキニ限ッテ0トナラナイ。故ニ $g(x)$ ハ次ノ様ナ展開ニナル。

$$g(x)=c_0\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^{(m+2)\nu}+c_1\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu x^{(m+2)\nu}\cdot x$$

$$g_0(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^{(m+2)\nu}$$

$$g_1(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu x^{(m+2)\nu}\cdot x$$

ト置ケバ $g_0(x)$, $g_1(x)$ ハ微分方程式(1)ノ Fundamentallösungen デアル。a_ν, b_ν ハ上ノ計算ヨリ正ノ実数デア

ルコトガワカルカラ、実軸ノ正ノ部分ハ g_0, g_1 ニトッテ chemin de determination ∞ デアル。

$m+2$ が偶数ナルトキハ g_0 ハ負ノ実軸モ亦 chemin de determination ∞ ニ持ツ。